ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය	-	මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம்	-	10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time	-	10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

※ මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).

※ **A කොටස:**
සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.

※ **B කොටස:**
ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.

※ නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.

※ ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I

කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

2. එක ම රූප සටහනක $y = 2|x+1|$ හා $y = 2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

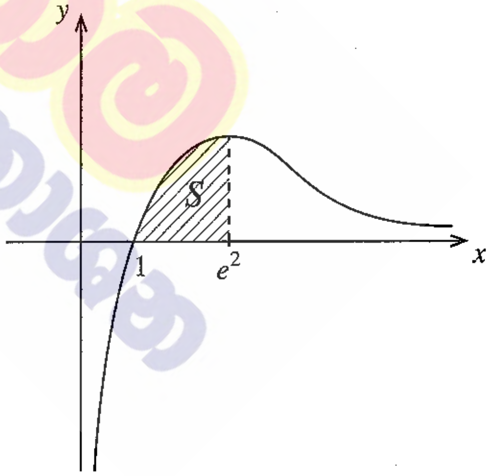
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\operatorname{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k=1$ බව පෙන්වන්න.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$ හා $x = e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක් බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස x−අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



[පස්වැනි පිටුව බලන්න.

7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්භ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ.

$p^3q = -1$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. $A \equiv (0, -1)$ හා $B \equiv (9, 8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[ගයවැනි පිටුව බලන්න.

9. $x + 2y = 3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S = 0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $k > 1$ යැයි ගනිමු. $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1 < k < 3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ හා $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $x^2 + x - 2$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a, b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a, b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) - 2g(x) \leq \dfrac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

12. (a) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}^\mathrm{T}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1+i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

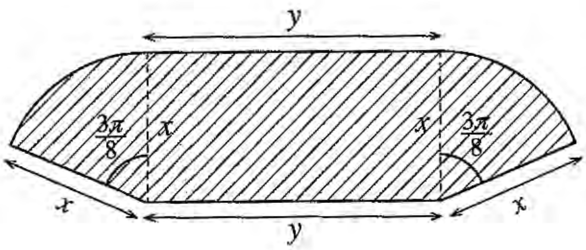
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය $36\ \mathrm{m}^2$ බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \frac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



[තෙවැනි පිටුව බලන්න.

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්,** I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක (x_1+at, y_1+bt) මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

l යනු $x+y-2=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙලින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ බව පෙන්වන්න.

[දහවැනි පිටුව බලන්න.

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\,(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා, වි.පැ. $= 6+1=7$ හා

ද.පැ $= 1(3+4) = 7$ වේ.

$\therefore n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා

k යනු ඕනෑම ධන නිඛිලයක් යැයි ගෙන $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4)$. 5

$n=k$ සඳහා ප්‍රකාශනය ලිවීමට

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$

$= k(3k+4)+6k+7$ 5

"$n=k$ ප්‍රතිඵලය, "$n=k+1$" හි ආදේශ කිරීම සඳහා

$= 3k^2+10k+7$

$= (k+1)(3k+7).$ 5

$(k+1)(3k+7)$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයක් පෙන්වා තිබීමට

$= (k+1)[3(k+1)+4].$

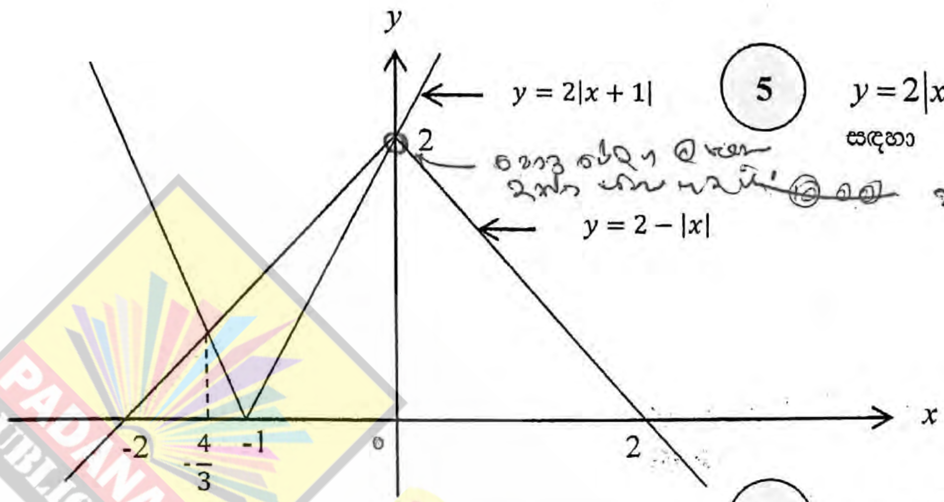
ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යනම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යබව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම මඟින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව නිගමනයට (සියලුම අනෙක් පියවර නිවැරදි නම් පමණි.)

2. එක ම රූප සටහනක $y = 2|x+1|$ හා $y = 2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



5 — $y = 2|x+1|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

5 — $y = 2-|x|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

(ප්‍රස්තාර සඳහා ලකුණු 10 ම ලබා ගැනීමට y - අක්ෂය මත පොදු ඡේදන ලක්ෂ්‍යය තිබිය යුතුය. නොඑසේ නම් ලකුණු 05 ක් පමණි.)

එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංක $x = 0$ වේ.

$x < -1$ සඳහා අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංක $-2(x+1) = 2+x$ මඟින් දෙනු ලබයි.

මෙය $x = -\frac{4}{3}$ ලබා දෙයි. 5

~~$x = 0$ සහ~~ $x = -\frac{4}{3}$ පෙන්වා තිබීමට

$t = \frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. 5

$t = \frac{x}{2}$ ආදේශයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

එවිට දෙන ලද අසමානතාව $2|2t+2|+|2t| \leq 4$ බවට පත් වේ.

මෙය $2|t+1| \leq 2-|t|$ ට තුල්‍ය වේ.

ප්‍රස්තාර මඟින් $-\frac{4}{3} \leq t \leq 0.$

$$\therefore \quad -\frac{8}{3} \leq x \leq 0.$$ 5

නිවැරදි විසඳුම ලබා ගැනීමට

විකල්ප ක්‍රමය 1:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \le -2}$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad -3x-4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{8}{3} \le x$$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le -2$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{-2 < x \le 0}$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad x \le 0$$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-2 < x \le 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x > 0}$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x \le 0$$

නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්ථා 3ම සඳහා 10

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්ථා 2 ක් සඳහා 5

$\therefore$ දෙන ලද අසමානතාව සඳහා විසඳුම් වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le 0$ 5

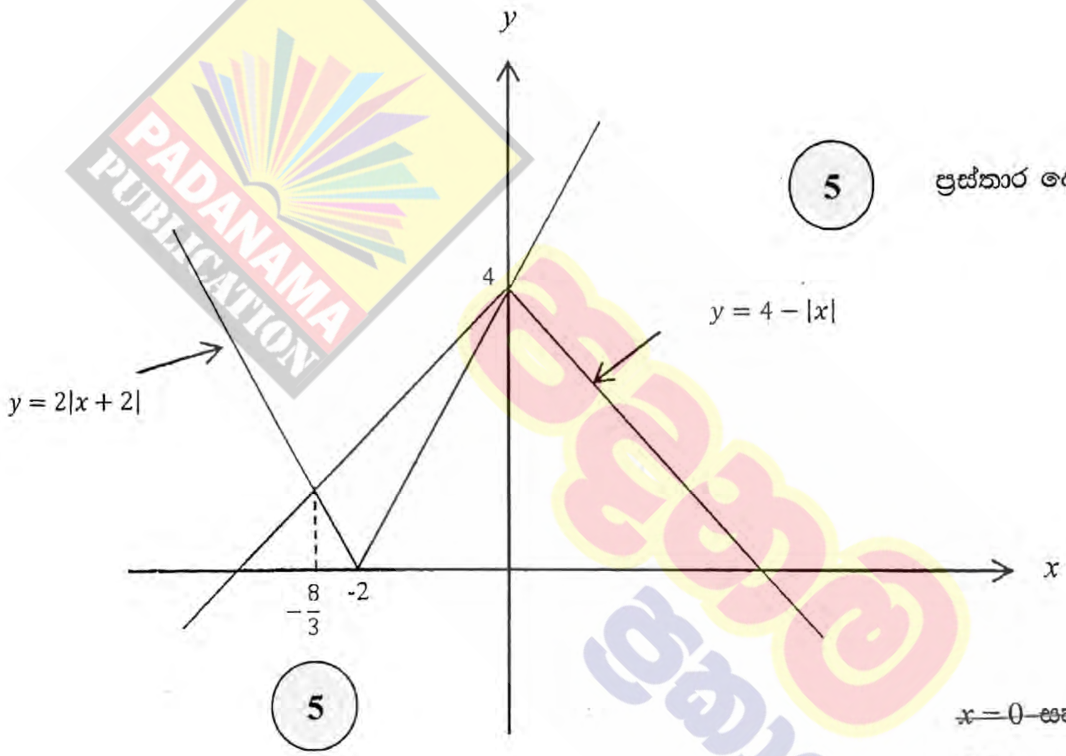
තෘප්තකරන x හි අගයන් වේ.

විකල්ප ක්‍රමය 2:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

$$2|x+2|+|x|\le 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x+2| \le 4-|x|$$



5 ප්‍රස්තාර දෙක සඳහා

~~x = 0 සහ~~ $x = -\frac{8}{3}$ පෙන්වා තිබීම.

ප්‍රස්තාර මඟින්,

$$2|x+2|\le 4-|x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}\le x\le 0$$

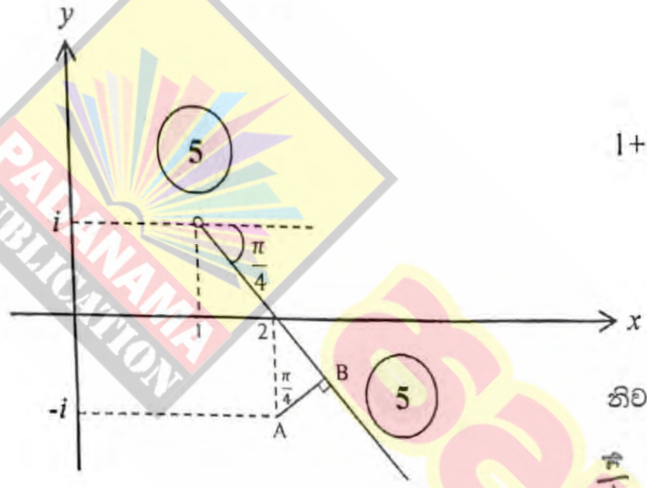
5

නිවැරදි විසඳුම පෙන්වා තිබීමට

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z-1-i)=-\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\operatorname{Arg}(iz+1-i)=\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න

$$\operatorname{Arg}(z-(1+i))=-\frac{\pi}{4}$$



$1+i$ හි සිදුර

නිවැරදි අර්ධ රේඛාව

$\frac{\pi}{4}$ [illegible]

$$\operatorname{Arg}(i(z-i-1))=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arg} i+\operatorname{Arg}(z-(1+i))=\frac{\pi}{4}$$

[illegible] $\longrightarrow$ $\operatorname{Arg}(z-(1+i))=-\frac{\pi}{4}$ 5

ගුණිතයක විස්තාරය ඓක්‍යයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම සහ $\operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}$ භාවිතය

දැන්, $\min|z-(2-i)|=AB$ 5

$=1.\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5

[illegible]

AB = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ම

~~[illegible]~~

අඩුම දුරගතහවුරු කිරීම.

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

විකල්ප ක්‍රමය:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

$z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\frac{\pi}{4} = Arg(iz+1-i) = Arg\left(1-y+i(x-1)\right)$

$\therefore \quad x-1 = (1)(1-y)$ 5

$\Rightarrow \quad x+y=2.$

දෙන ලද විස්තාරය x හා y අතර සම්බන්ධයක් ලෙස ලිවීම.

දැන් $|z-2+i| = |x+iy-2+i|$

$= |(x-2)+i(y+1)|$

$= |y+i(y+1)| \qquad (\because x-2=y)$

$= \sqrt{y^2+(y+1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$ 5

මාපාංකය, x හෝ y හි වර්ග පූර්ණය ලෙස ලිවීම.

$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\because \ 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$ (= 0 වන්නේ $y = -\frac{1}{2}$ විටය.))

$\therefore \min|z-2+i| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k=1$ බව පෙන්වන්න.

$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ සඳහා

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$$

$22-3r=7 \Rightarrow r=5$ 5 r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^7 හි සංගුණකය $= \underline{{}^{11}C_5 \ k^5}$ 5 නිවැරදි සංගුණකය

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ සඳහා $T_{r+1} = {}^{11}C_r \ x^{11-r} \ (-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r \, {}^{11}C_r \ x^{11-3r}$

$11-3r=-7 \Rightarrow \ r=6$ 5 r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^{-7} හි සංගුණකය $= \underline{{}^{11}C_6}$ 5 නිවැරදි සංගුණකය

එවිට, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5 \ k^5$ මඟින් ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$ නිසා $k=1$ ලබා දෙයි.

5 පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad 5$$

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)}_{} \times \underbrace{\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{} \times \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)}_{} \times \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}_{}$$

[illegible]

$$= 1 \times 2 \times 1 \times 2$$

5 5 5 5

සීමා එක එකක් සඳහා 5

$$= 4.$$

විකල්ප ක්‍රමය 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$ 5

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

5 5 5 5

සීමා එක එකක් සඳහා

$$= 4$$

විකල්ප ක්‍රමය 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

5 ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

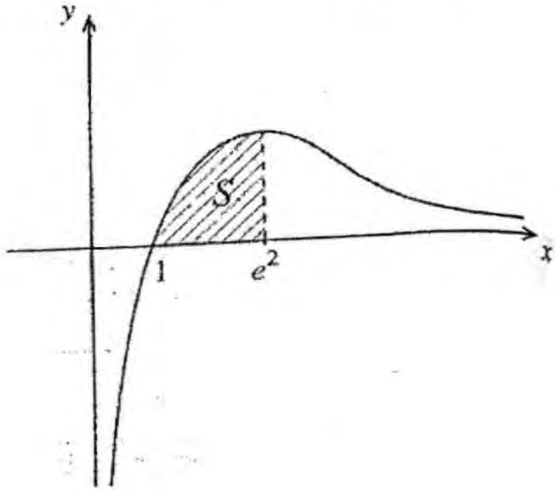
5 5 5 5

$= 4.$

සීමා එක එකක් සඳහා 5

6. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y=0$ හා $x=e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක් බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



S හි වර්ගඵලය $=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 5 සීමාවන් [illegible]

$=(\ln x).2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2x^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{x}dx$ 5

සීමාව ආදේශ [illegible]
[illegible]
[illegible]

$=4e-2\int_1^{e^2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=4e-\left(2\sqrt{x}2\right)\Big|_1^{e^2}$

$=4e-4e+4$

$=4$ 5 සීමා ආදේශයෙන් පිළිතුර ලබාගැනීම

අවශ්‍ය පරිමාව $=\int_1^{e^2}\pi\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ 5

$=\pi\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$=\pi\frac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^{e^2}$

$=\frac{8\pi}{3}.$ 5

7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්භ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ. $p^3q = -1$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{හා} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{c}{t^2}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$$

5

t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ ලිවීම

$\therefore$ P හිදි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\left.\frac{1}{t^2}\right|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore$ P හිදි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}\ (x - cp)$$

$\therefore x + p^2y = 2cp.$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

P හිදි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමය $= p^2$.

$\therefore$ P හිදි අභිලම්බයේ සමීකරණය $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ 5

අභිලම්බයේ සමීකරණය

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ මෙම අභිලම්බ රේඛාව මත වේ.

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \quad \Rightarrow c(p-q) = -p^3qc(p-q)$ 5

ආදේශ කිරීම සඳහා

P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් නිසා $p \neq q$ වේ.

$p^3q = -1.$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

විකල්ප ක්‍රමය: (අන්තිම කොටස සඳහා)

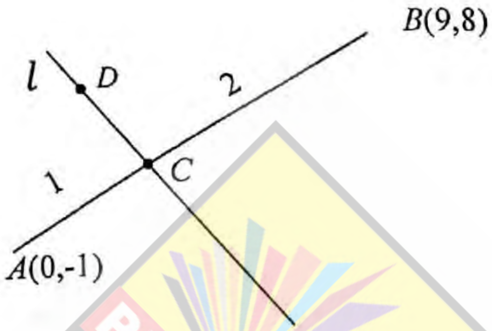
රේඛාව -ට ලම්බව වන නිසා

PQ අනුක්‍රමණය = P හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය 5 — අවශ්‍යතාව සඳහා

$$\therefore \frac{\frac{c}{q}-\frac{c}{p}}{cq-cp}=p^2$$ 5 — $(\because\ p\neq q, c\neq o)$ — ආදේශය සඳහා

$$\therefore p^3q=-1$$ 5 — පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

8. $A \equiv (0, -1)$ හා $B \equiv (9, 8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.
$y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1} \right)$$

$\equiv (3,2)$ 5 — C හි ඛණ්ඩාංක

AB හි අනුක්‍රමණය $= 1$

l හි අනුක්‍රමණය $= -1$ 5 — l හි අනුක්‍රමණය සඳහා

$\therefore$ l හි සමීකරණය

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

එනම්, $x + y - 5 = 0$. ---------------- (1) 5 — l හි සමීකරණය ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

AD හි සමීකරණය $y - (-1) = 5(x - 0)$ 5 — D හි ඛණ්ඩාංක ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

එනම්, $y + 1 = 5x$ ---------------- (2)

(1) හා (2) විසඳීමෙන්

$D \equiv (1, 4)$. 5 — $D \equiv (1, 4)$ තිබීම

9. $x+2y=3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S=0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

විකල්ප ක්‍රමය:

5 5

කේන්ද්‍රයේ සිට ලම්බ දුර < අරය

සත්සන්දනයට 5

$S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$

$x+2y-3=0$ රේඛාව ℓ යැයි ගනිමු.

ℓ මත: $x=3-2y$;

$(3-2y)^2+y^2-4(3-2y)+1=0$

$\therefore \quad 5y^2-4y-2=0$ 5 වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගැනීමට

මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ විවේචක, $\Delta=16+4(5)(2)$ 5 විවේචකය ලිවීම

$\Delta>0$ නිසා $x+2y=3$ රේඛාව ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී S ඡේදනය කරයි. 5 $\Delta>0$ සඳහා

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය 5 λ ආකාරය සඳහා

$x^2+y^2-4x+1+\lambda(x+2y-3)=0$ ලෙස ලිවිය හැක;

මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

මෙම වෘත්තය, $(2,0)$ හරහා ගමන් කරන නිසා

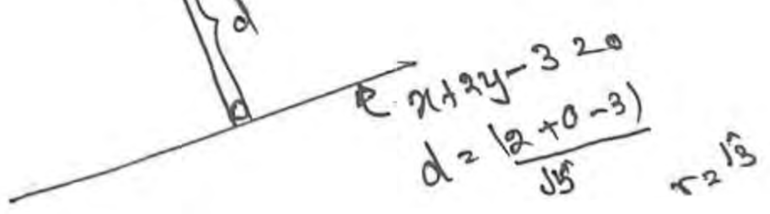
$4-8+1+\lambda(2-3)=0$

$\therefore \lambda=-3$ 5 $\lambda=-3$ ලබා ගැනීමට

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2+y^2-4x+1+(-3)(x+2y-3)=0$ } ලිවීම ප්‍රකාශනය ගනන් නැත

එනම්, $x^2+y^2-7x-6y+10=0.$



10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින් $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x \cos x)$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$ 5

$\cos 2x$ හා $\sin 2x$ භාවිතයෙන් ප්‍රකාශන ලිවීමට

$$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$$

$$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$R = 2$ ලබා ගැනීමට

මෙහි $R = 2$ හා $\alpha = \frac{\pi}{3}$

5 5

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ලබා ගැනීමට

$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$ සමීකරණය

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1 = 1$ ට තුල්‍ය වේ.

$$\therefore \quad 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

ඒ නයින්, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 5

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ලබා ගැනීමට

$$\therefore \quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; \ n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}; \ \underline{n \in \mathbb{Z}}$$ 5

නිවැරදි පිළිතුර ලබා ගැනීමට

11.(a) $k>1$ යැයි ගනිමු. $x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1<k<3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a,b,c\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා x^2+x-2 මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a,b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a,b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව, සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)-2g(x)\le\frac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ හි විවේචකය Δ යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta=4(k+1)^2-4(k-3)^2$ 5

$=4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$=32(k-1)$. 5

$k>1$ නිසා $\Delta>0$ වේ. 5

$\therefore$ දෙන ලද සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්වික මූල දෙකක් ඇත. 5

20

$\alpha+\beta=2(k+1)$ හා $\alpha\beta=(k-3)^2$ 5 + 5

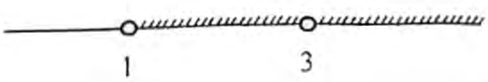
α හා β දෙකම ධන වීම සඳහා

$\alpha+\beta>0$ හා $\alpha\beta>0$ විය යුතුයි. 10

$k>1$ නිසා $\alpha+\beta=2(k+1)>0$ වේ. 5

හා $\alpha\beta=(k-3)^2>0$ ම නම් පමණක් $k\neq3$ වේ. 10

$\therefore$ අවශ්‍ය k හි අගයන් $1<k<3$ හෝ $k>3$ වේ.



35

දැන් $1 < k < 3$ යැයි ගනිමු. $\alpha > 0$ සහ $\beta > 0$ බව දනිමු.

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන සමීකරණය $\left(x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = 0$ වේ. 5

එනම්, $x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = 0.$ 5

එනම්, $\sqrt{\alpha\beta}x^2 - \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)x + 1 = 0.$ 5

5

$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(k-3)^2} = |k-3| = 3-k$ බව දනිමු ($\because 1 < k < 3$).

තවද, $\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$ 5

$= 2(k+1) + 2(3-k)$ 5

$= 8.$ 5

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2\sqrt{2}$ 5 $(\because \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0.)$

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $(3-k)x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ වේ. 5

$(k-3)x^2 - 2(\sqrt{k-1})x + 1 = 0$ 35

45

(b)

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ හා $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 නිසා ශේෂ ප්‍රමේය මගින්

$f(1) = 5.$ 5

$\therefore a + b + 3 = 5$

$a + b = 2.$ 5 ---------------- (1)

$g(x)$ යන්න $x^2 + x - 2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ නිසා

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1 = (x^2 + x - 2)(x + \lambda) + x + 1$ 5

$((x^0));\quad 1 = -2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 0.$

$\therefore g(x) = x(x^2 + x - 2) + x + 1$

$= x^3 + x^2 - x + 1.$

ඒ නයින්, $c = 1$ හා $a = -1$ වේ. 5 + 5

දැන් (1) මගින් $b = 3$ වේ. 5

30

$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

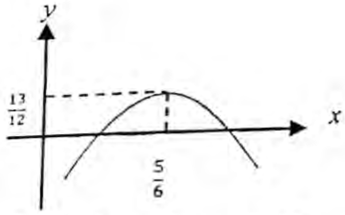
$$=-3x^2+5x-1 \quad 5$$

[illegible]

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \quad 5$$

$$\leq -3\times\left(\frac{-13}{36}\right),\ \because \left(x-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0. \quad 5$$



$$\therefore\ f(x)-2g(x)\leq\frac{13}{12}. \quad 5$$

[illegible]

20

Q 11 (a) 20, 35, 45

(b) 30, 20

12. (a) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(a)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) 1,2,3,4 හා 5 අතරින් වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4කින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^5P_4$ 5

$= 5!$ 5 [illegible]

$= 120$ 5 [illegible]

15

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4ක් තෝරාගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන

	එවැනි වෙනත් සංඛ්‍යාංක 4ක සංඛ්‍යා ගණන
වෙනස් සංඛ්‍යාංක හතරකින්	${}^5P_4 = 120$
එක් සංඛ්‍යාංකයක් පමණක් දෙවරක් පුනරාවර්තව සහ අනෙක් සංඛ්‍යාංක දෙක වෙනස්	[illegible] 10 5 [illegible] ${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$
සංඛ්‍යාංක දෙකක් දෙවරක් පුනරාවර්තව	10 ${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ 5
එක් සංඛ්‍යාංකයක් තෙවරක් පුනරාවර්තව	10 ${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!} = 16$ 5

සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= \underline{120} + \underline{288} + \underline{36} + \underline{16}$ 5

$= 460$ 5

[illegible]

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

$r^1 : 40 = 25A - 5(1 - 4B)$

$r^0 : 9 = -5A + 5B$ 10

[illegible]

$A = \frac{1}{5}$ සහ $B = 2$

5 5

A හා B සොයාගැනීමට
ල. 20ම දෙන්න.
(අගයන් සාවද්‍ය නිර්ණය වුවද)

20

$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2}$ 5

A හා B වල වැරදි අගය ආදේශයට
ල. 5 දෙන්න.

$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r (2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ 5

හා ඒ නයින්,

$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$; මෙහි $f(r) = \frac{r-1}{5^r (2r+1)^2}$ වේ. 10

$r = 1$; $\frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2$; $\frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$ 5 වැරදි 20 ල. දෙන්න

$\vdots \qquad \vdots$

$r = n-1$; $\frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ $\frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$ 5

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0)$ 5

$= \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2} - (-1)$ 5

f(r) නිවැරදි නම්
ල. 10 දෙන්න

$= 1 + \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2}$ 5

45

[illegible]

(C). [illegible] $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}\right)$

5

$= 1.$ 5

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. 5

15

Q12 – (a) 15 , 55

(b) 20 , 45 , 15 ,

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.
a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ හා $z_2 = 1 + i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.
තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,
ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.
ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන
$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.
$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව අපෝහනය කරන්න.

(*a*) 5

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & a+3 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \quad 10$$

4 ම නිවැරදි නම් 10

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් 5

[illegible] 4 ම [illegible] – 10
3 – 5

$|C| = (a^2+3) - (a+1)(a+3) = -4a$

$\neq 0 \ (\because a \neq 0)$ 5

$\therefore$ සියලු $a \neq 0$ සඳහා C^{-1} පවතී. 5

$\boxed{25}$

$a \neq 0$ සඳහා $C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$ 10

4 ම නිවැරදි නම් 10

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් 5

$\boxed{10}$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1 & -a^2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix}$$

2 ම නිවැරදි නම් 10

1 ක් පමණක් නිවැරදි නම් 5

$$\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9\\-11\end{pmatrix} \quad 10$$

$$\frac{2a+5}{4a}=\frac{9}{8} \quad \text{හා} \quad \frac{-2a^2+a-5}{4a}=-\frac{11}{8} \quad 5$$

මෙම සමීකරණ දෙක මගින් $a=2$ වේ. 5 × **20**

5

$a=2$ විට $C=\begin{pmatrix}7&5\\3&1\end{pmatrix}$ හා $C^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-5\\-3&7\end{pmatrix}$.

$DC-C^TC=8I \Leftrightarrow D-C^T=8IC^{-1}$ 5

5

$\therefore D=C^T+8C^{-1}=\begin{pmatrix}7&3\\5&1\end{pmatrix}+8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1&-5\\-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\8&-6\end{pmatrix}$. 5 **20**

(b)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x}+i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y} \quad 5$$

5 **10**

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad 5$$

5

$$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

5

$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad 10$$

30

$$f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x), & f(x)\geq 0 \text{ විට.}\\ 0, & f(x)<0 \text{ විට.}\end{cases}$$

$\therefore f(x)+|f(x)|>0$ ම නම් පමණක් $f(x)>0$. 5

$\therefore\ f(x)+|f(x)|>0$ තෘප්ත කරන තාත්ත්වික අගයන්

$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{4}<x<0$ or $x>2$. 5 + ~~10~~ 5

15

(b)

$x>0$ සඳහා;

$$36=xy+\frac{3}{8}\pi x^2$$ 10

$\therefore\quad y=\frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x,\ x>0$ සඳහා

$$p=2x+2y+2\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$$ 10

$$=2x+2\left(\frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x\right)+\frac{3}{4}\pi x$$

$$\therefore p=2x+\frac{72}{x}$$ 5

$\frac{dp}{dx}=2-\frac{72}{x^2};\ x>0.$

5

$\frac{dp}{dx}=0\quad\Leftrightarrow\quad x=6.$ 5

$0<x<6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}<0$ සහ

$x>6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}>0.$

$\therefore\ x=6$ විට p අවම වේ. 5

40

හැරවුම් ලක්ෂ්‍යහි දී:

$f^{\prime}(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad x=\frac{1}{2}$ 5

	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<2$	$2<x<\infty$
$f^{\prime}(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$f(x)$	↘ අඩු වේ	↗ වැඩි වේ	↗ වැඩි වේ	↘ අඩු වේ	↘ අඩු වේ

5 5 5 5 5

$\therefore f(x)$ යන්න $[-1,0)$ හා $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ මත වැඩි වන අතර

$(-\infty,-1]$, $\left[\frac{1}{2},2\right)$ හා $(2,\infty)$ මත අඩු වේ.

30

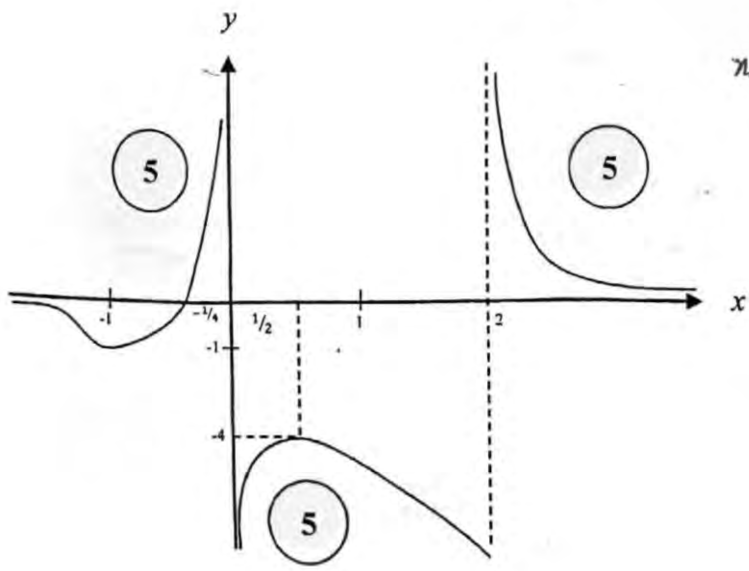
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් වේ. 5

$(-1,-1)$ ස්ථානීය අවමයක් වේ. 5

x - අන්තඃඛණ්ඩය : $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ 5

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \therefore y=0$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $x=0$ සහ $x=2$. 5



40

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

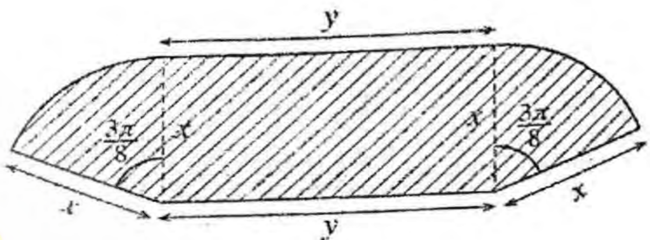
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය $36\ \text{m}^2$ බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



(*a*)

$x \neq 0, 2,$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$

10

එවිට, $f^1(x) = \dfrac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$ 10 20

$= -\dfrac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$

$= -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$, $x \neq 0, 2$ සඳහා.

5

25

තාත්ත්වික කොටස් සමාන කිරීම මගින්

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad 5$$

05

(c)

$n\in\mathbb{Z}^{+}$ හා $\underline{\theta\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}}$ සඳහා Cos θ [illegible]

$$(1+i\tan\theta)^{n}=\frac{1}{\cos^{n}\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)^{n} \qquad 5$$

$$=\sec^{n}\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta) \text{ ---------- } (1) \qquad 5$$

10

$$(1-i\tan\theta)^{n}=(1+i\tan(-\theta))^{n}$$

$$=\sec^{n}(-\theta)\left[\cos n(-\theta)+i\sin n(-\theta)\right] \qquad 5$$

$$=\sec^{n}\theta(\cos n\theta-i\sin n\theta) \text{ ---------- } (2)$$

(1) හා (2) මගින් $(1+i\tan\theta)^{n}+(1-i\tan\theta)^{n}=2\sec^{n}\theta\cos n\theta$ ලැබේ. 5

10

$z=i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ මගින්

$$(1+z)^{25}+(1-z)^{25}=\left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}+\left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$=2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) \qquad 5$$

$$=0,\ \text{as } \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0. \qquad 5$$

10

15.(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්,** I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

(*a*)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$$
$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^3+x) + Cx^2$$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට;

x^0 : $1 = A$

x : $3 = B$

x^2 : $4 = 2A + C$ ~~5~~ + ~~5~~

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3$ හා $C = 2.$ 5

5 5

15

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ $\cancel{10}$ 5

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ 5

$$=\ln|x|+3\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}+E,$$ මෙහි E යනු අභිමත නියතයක් වේ.

5 5 5 5

5

(b)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$ 10

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ $\cancel{5}$ 10

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ $\cancel{5}$

$\sqrt{x}=\sin\theta$ යැයි ගනිමු. එවිට $dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$

5

$x=0$ විට දී, $\theta=0$.

$x=\frac{1}{4}$ විට දී, $\theta=\frac{\pi}{6}$ 5

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\;2\sin\theta\cos\theta d\theta$$ 5

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2\theta)d\theta$$ 5

$$=\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \quad 5$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad 5$$

$$\therefore I=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{24}.$$

5 $\boxed{35}$

(c)

$$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x)$$

$$=x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)+\ln(x^2+1)+\frac{2}{1+x^2}-2 \quad 10$$

$$=\ln(x^2+1)+\underbrace{\frac{2x^2+2-2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$$

$$=\ln(x^2+1). \quad 5$$

$\boxed{15}$

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x+C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. 5

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx=\ln 2+2\left(\frac{\pi}{4}\right)-2 \quad 5$$

$$\cancel{=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2}$$

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2+\pi-4)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 4+\pi-4) \quad 5$$

$\boxed{15}$

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1) \;+\; \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx \qquad 5$$

ලඝුගණක ln භාවිතයට ලකුණු.

දැන්, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$

$$= \int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1)dx \qquad 5$$

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4 \qquad 5$$

15

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක (x_1+at, y_1+bt) මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

l යනු $x+y-2=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

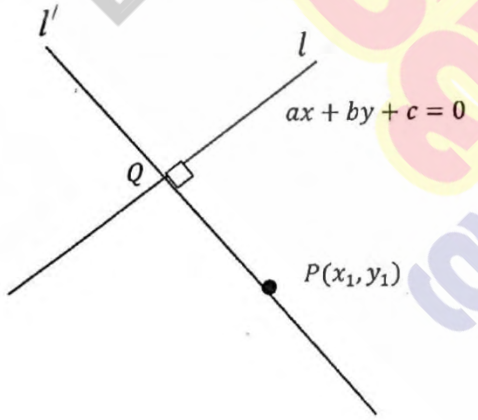
l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ බව පෙන්වන්න.



$(a^2+b^2 \neq 0)$

l' හි සමීකරණය: $y - y_1 = \dfrac{b}{a}(x - x_1)$. (5)

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{x-x_1}{a} = t$ (ලෙස ගනිමු) (5)

එවිට, $x = x_1 + at, \ y = y_1 + bt$ (5)

($a=0$ හා $b \neq 0$ හෝ $a \neq 0$ හා $b=0$ විට ද මෙය වලංගු වේ.)

15

l හා l' හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ යැයි ගනිමු.

Q, l මත බැවින් $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0.$

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}. \quad 5$$

P සිට l ට ලම්බ දුර $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad 5$$

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t_1|. \quad 5$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}.\ \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 5$$

$\ell : x + y - 2 = 0$

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ 5 $\therefore$ A හා B, ℓ හි දෙපස පිහිටයි. $\cancel{5}$

5

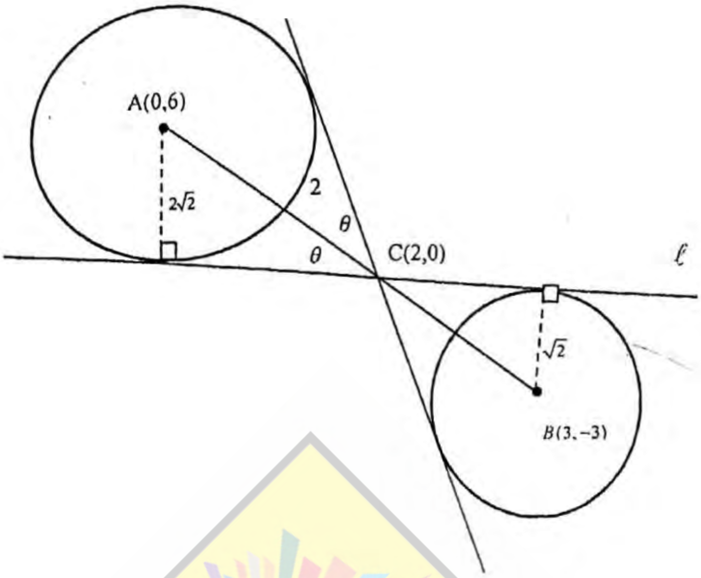
AB හි අනුක්‍රමණය $= -3$ 5

ℓ හා AB අතර සුළු කෝණය

$$\tan\theta = \left|\frac{-1-(-3)}{1+(-1)(-3)}\right| \quad 5$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

5



5 5 5 5

S_1 හි අරය $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ හා S_2 හි අරය $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ වේ. [illegible]

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 : 1$ 5 [illegible]

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3} \right) = (2,0)$ 5 [illegible]

m යනු අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය යැයි ගනිමු.

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left| \dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)} \right|$ 5

$\Leftrightarrow \quad 1 - 3m = 2m + 6$ හෝ $3m - 1 = 2m + 6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1$ හෝ $m = 7$

$\therefore \ \underline{m = 7.}$ 5 [illegible]

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ $y - 0 = 7(x-2).$ 5 [illegible]

එනම්, $7x - y - 14 = 0.$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

S මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින් $c = 0$. 5

S යන්න S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන බැවින් පොදු ජ්‍යාය A හරහා යයි.

පොදු ජ්‍යාය වන්නේ $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$ ← 5

එවිට $A \equiv (0,6)$ යන්න $S - S_1 = 0$ මත බැවින්,

$$(2f + 12)(6) - 28 = 0.$$ 5 ආදේශය

$$(f + 6)(3) - 7 = 0, \text{ එවිට } f = -\frac{11}{3}.$$ 5 f සෙවීම

S යන්න S_2 ට ප්‍රලම්බ බැවින්, $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16$. 5 ප්‍රලම්බතා

$$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \Rightarrow g = -\frac{19}{3}.$$ 5 g සෙවීම

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය;

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0$$ 5 සමීකරණය ලබා ගැනීමට

එනම්, $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$.

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^{x}) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*)

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \longrightarrow (1)$ 5

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \longrightarrow (2)$ 5

(1) + (2)

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B \quad 5$$

$A+B=C$ හා $A-B=D$, ලෙස ගැනීමෙන් $A = \frac{C+D}{2}, B = \frac{C-D}{2}$ වේ.

$$\therefore \quad \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right). \quad 5$$

දැන්, $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$ 5

$+\cos D$ $-\cos D$ කිරීමට
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-D\right)$ [illegible]
[illegible]

$$= 2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right). \quad 5$$

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\ (\cos 9x - \cos 7x) = 0 \qquad (\sin x \neq 0)$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ 5

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $(\cos 8x - \sin 8x) = 0$ 5

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $\tan 8x = 1$.

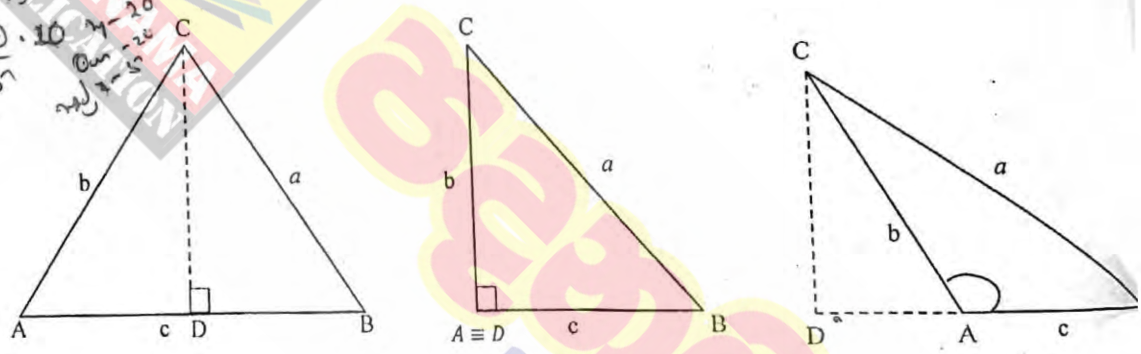
$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4};\ n \in \mathbb{Z}$.

$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32};\ n \in \mathbb{Z}$. + 5 5

(b)

කෝසයින් නීතිය: ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගන්න 5

එවිට $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.



සාධනය: එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්,

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ ——— (1) 5

(i) අවස්ථාව A සුළු කෝණයක් විට;

$DC = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ 5

(ii) අවස්ථාව A මහා කෝණයක් විට;

$DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c + b\cos(\pi - A) = c - b\cos A$ 5

$\therefore$ මෙම අවස්ථා දෙකම සඳහා, (1) මඟින් $a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ \ (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$

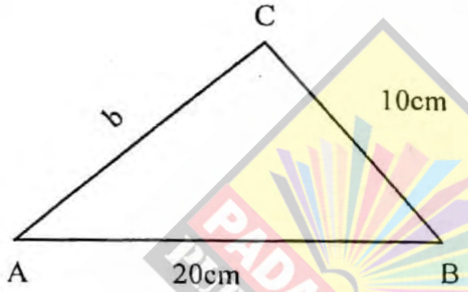
$A = \dfrac{\pi}{2}$ විටදී, $\cos A = 0$ බැවින් මෙම අවස්ථාවට ද වලංගු වේ. 5

$x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $(\cos x \neq 0)$

$$\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x \qquad 5$$

$$= \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad 5$$



$\sin 2B = \dfrac{24}{25} \Rightarrow B$ සුළු කෝණයකි.

$$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}, \text{ මෙහි } t = \tan B \qquad 5$$

$$12t^2 - 25t + 12 = 0$$

$$(4t-3)(3t-4) = 0$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ හෝ } \frac{4}{3} \qquad 5 + 5$$

15

$\therefore B$ සඳහා වෙනස් විසඳුම් දෙකකි.

$\therefore$ එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබේ.

[illegible] Δ 70 [illegible]

B යනු සුළු කෝණයකි. $\cos B = \dfrac{3}{5}$ හෝ $\cos B = \dfrac{4}{5}$

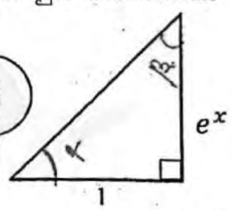
$\cos B = \dfrac{3}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}. = \sqrt{260}$ 5 [illegible]

$\cos B = \dfrac{4}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}. \ \sqrt{180}$ 5 [illegible]

(c)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$ යැයි ගනිමු. $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$ බැවින් α සුළු කෝණයකි.

එවිට $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$ 5



$\therefore \tan\alpha = e^x.$ 5

[illegible] α [illegible] β [illegible] $\alpha = \alpha$ [illegible]

එවිට, දෙන ලද සමීකරණය $\alpha + \alpha = \lambda$ වේ.

$$\therefore \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\lambda \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2e^x}{1-e^{2x}} = 2 \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad e^x = 1 - e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad 5$$

$e^x > 0$ බැවින්, (−) ලකුණ ගත නොහැක.

$$\therefore \quad e^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad 5$$

ගණනයට

$$\therefore \quad x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \quad 5$$

දෙන ලද සමීකරණය මෙම x අගය තෘප්ත කරයි.

$$\underbrace{\sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}(e^{x})}_{\beta} = \underbrace{\tan^{-1}2}_{\gamma}$$

$$\sin\alpha = (1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)^{-1/2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

$$\tan\beta = e^{x} \qquad \tan\gamma = 2$$

$$\sin^2\alpha = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{e^{2x}}$$

$$= e^{x}$$

$$\alpha+\beta = \gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan\gamma$$

15

$$\frac{e^{x}+e^{x}}{1-e^{2x}} = 2$$

$$2(e^{x})^2 + 2e^{x} - 2 = 0$$

$$(e^{x})^2 + e^{x} - 1 = 0$$

$$e^{2x} + e^{x} - 1 = 0$$ ඔෙක

$$e^{x} = t$$ ලෙස

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$t > 0$$

$$t = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$e^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\sin\alpha = (1+e^{-2x})^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+e^{-2x})}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{(1+e^{-2x})e^{2x}}}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{0}}}$$

$$\sin x = \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$2|x+2| + |x| \le 4$$

$$2|x+1| + |x| \le 2$$

$$2|x+1| \le 2 - |x|$$

උසස් පෙළ සඳහා ග්‍රන්ථ නාමාවලිය

(අ.පො.ස) උසස් පෙළ
12-13 ශ්‍රේණි - කෙටි සටහන්

සිංහල මාධ්‍ය

විද්‍යා - ගණිත

- 12 සාමාන්‍ය තොරතුරු තාක්ෂණය
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 1
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 2
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 3
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 4
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 5
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 1
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 2
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 3
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 4
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 5
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 1
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 2
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 3
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 4
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 5
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 6 (ක්‍රියාකාරී මානවයා)
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 7 (ක්‍රියාකාරී ශාකය)
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 1
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 2
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 3
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 4

වාණිජ්‍යය

- 12 ගිණුම්කරණය
- 13 ගිණුම්කරණය
- 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 13 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 12 ආර්ථික විද්‍යාව
- 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 1
- 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 2

කලා

- 12 සිංහල
- 13 සිංහල
- 12 දේශපාලන විද්‍යාව
- 13 දේශපාලන විද්‍යාව
- 12 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- 13 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- 12 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- 13 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- 12 භූගෝල විද්‍යාව
- 13 භූගෝල විද්‍යාව
- 12 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- 13 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- 12 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය
- 13 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය

Grade 12-13 - Short Notes

English Medium

- 12 Accounting
- 13 Accounting
- 12 Business Studies
- 13 Business Studies
- 12 Economics

12-13 ශ්‍රේණි - ප්‍රශ්නෝත්තර

සිංහල මාධ්‍ය

- සාමාන්‍ය දැනීම
- 12 ගිණුම්කරණය - 1
- 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 12 ආර්ථික විද්‍යාව

සියලු ම ශ්‍රේණි සඳහා කෙටි සටහන් සහ ප්‍රශ්න පත්‍ර පොත් අප සතුව තිබෙන අතර, මෙම ඕනෑම ග්‍රන්ථයක් වට්ටම් සහිත ව ඔබේ නිවසට ම ගෙන්වා ගත හැකි ය.